第8講　数列②

【CHECK & UP】

1　正の整数 a を初項とし，1より大きい整数 r を公比とする等比数列 $\{a_n\}$ が $a_4=54$ を満たすとき，次の問いに答えよ.

(1)　$\{a_n\}$ の初項と公比を求めよ.

(2)　$S_n=\sum_{k=1}^{n} ka_k$ とするとき，S_n を求めよ.

2　数列 1，2，2，3，3，3，4，4，4，4，5，5，5，5，5，6，…… の第 n 項を a_n とする.この数列を第 k 群に k 個の項を含むように分ける.このとき次の問いに答えよ.

(1)　第20群の初項は数列 $\{a_n\}$ の何番目の項か.

(2)　$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{205}$ を求めよ.

3　[1]　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ.

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=-\dfrac{1}{2}$

(2)　$a_1=3$，$a_{n+1}+a_n=0$

(3)　$a_1=4$，$a_{n+1}=-3a_n+8$

[2]　$a_{n+1}=a_n+(2n+3)$，$a_1=3$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$　で表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ.

(1)　a_n の一般項を求めよ.

(2)　$\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k}$ を求めよ.

[3]　$c_1=2$，$c_{n+1}=-c_n+n^2+3$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$　で表される数列 $\{c_n\}$ について，次の問いに答えよ.

(1)　c_{n+2} を c_n と n を用いて表せ.

(2)　$c_{25}-c_{23}$ を求めよ.また c_{25} を求めよ.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=3,\ a_{n+1}=-2a_n+8\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると

$$a_n=\frac{(\boxed{\text{アイ}})^{n-1}+\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である．したがって，自然数 n に対し $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおけば

$$S_n=\frac{-(\boxed{\text{オカ}})^{n}+\boxed{\text{キク}}\,n+\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

である．

(2) 自然数 n に対し $T_n=\sum_{k=1}^{n}|a_k|$ とおく．

$a_n=0$ となるのは $n=\boxed{\text{サ}}$ のときであり，このとき $T_{\boxed{\text{サ}}}=\boxed{\text{シ}}$ である．

また，$n>\boxed{\text{サ}}$ のとき

$$|a_n|=\frac{\boxed{\text{ス}}^{\,n-1}+\boxed{\text{ウ}}\cdot(\boxed{\text{セソ}})^{n-1}}{\boxed{\text{エ}}}$$

と表すことができる．これより，$n>\boxed{\text{サ}}$ かつ n が奇数ならば

$$T_n=\frac{\boxed{\text{タ}}^{\,n}+\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

であり，$n>\boxed{\text{サ}}$ かつ n が偶数ならば

$$T_n=\frac{\boxed{\text{ト}}^{\,n}+\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 $\{a_n\}$ を初項 a_1 が 1 で公比が $\frac{1}{3}$ の等比数列とする．数列 $\{a_n\}$ の偶数番目の項を取り出して，数列 $\{b_n\}$ を $b_n=a_{2n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める．$T_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$ とおく．

(1) $\{b_n\}$ も等比数列であり，その初項は $\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，公比は $\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である．したがって

$$T_n=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\left(1-\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}^{n}}\right)$$

である．また，積 $b_1b_2\cdots b_n$ を求めると

$$b_1b_2\cdots b_n=\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}^{n^2}}$$

となる．

(2) 次に，数列 $\{c_n\}$ を $c_n=2n\cdot b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定め，$U_n=\sum_{k=1}^{n}c_k$ とおく．

$$\boxed{サ}c_{n+1}-c_n=\boxed{シ}b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つから

$$\sum_{k=1}^{n}(\boxed{サ}c_{k+1}-c_k)=\boxed{シ}T_n \quad \cdots\cdots①$$

である．また，この左辺の和をまとめ直すと，U_n，c_{n+1}，c_1 を用いて

$$\sum_{k=1}^{n}(\boxed{サ}c_{k+1}-c_k)=\boxed{ス}U_n+\boxed{セ}c_{n+1}-\boxed{ソ}c_1 \quad \cdots\cdots②$$

と表される．

①と②より

$$U_n=\frac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツテ}}-\frac{\boxed{トナ}n+\boxed{ニヌ}}{\boxed{ツテ}}\cdot\frac{1}{\boxed{ネ}^{n}}$$

となる．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　$\{a_n\}$ を $a_2=-\dfrac{7}{3}$，$a_5=-\dfrac{25}{3}$ である等差数列とし，自然数 n に対して，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく．

$a_1=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であり，$\{a_n\}$ の公差は $\boxed{\text{エオ}}$ である．したがって

$$a_n=\boxed{\text{カキ}}\,n+\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$S_n=\boxed{\text{コ}}\,n^2+\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\,n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．

次に，数列 $\{b_n\}$ は

$$\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{4}{3}b_n+S_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\quad\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

を満たすとする．数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう．(I)から，$b_1=\boxed{\text{ス}}$ である．さらに，$\sum_{k=1}^{n+1}b_k=\sum_{k=1}^{n}b_k+b_{n+1}$ に注意して，(I)を利用すると

$$b_{n+1}=\boxed{\text{セ}}\,b_n+\boxed{\text{ソ}}\,n+\boxed{\text{タ}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立ち，この等式は

$$b_{n+1}+\boxed{\text{チ}}\,(n+1)+\boxed{\text{ツ}}$$
$$=\boxed{\text{セ}}\,(b_n+\boxed{\text{チ}}\,n+\boxed{\text{ツ}})\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と変形できる．ここで

$$c_n=b_n+\boxed{\text{チ}}\,n+\boxed{\text{ツ}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\quad\cdots\cdots(\mathrm{II})$$

とおくと，$\{c_n\}$ は，$c_1=\boxed{\text{テ}}$，公比が $\boxed{\text{ト}}$ の等比数列であるから，(II)により

$$b_n=\boxed{\text{ナ}}^{\boxed{\text{ニ}}}-\boxed{\text{ヌ}}\,n-\boxed{\text{ネ}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である．ただし，$\boxed{\text{ニ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ．

⓪　$n-2$　　①　$n-1$　　②　n　　③　$n+1$　　④　$n+2$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第8講　数列②

1　$\{a_n\}$ を初項 a，公差 d の等差数列とし，$\{b_n\}$ を初項 a，公比 r の等比数列とする．ただし，$a\neq 0$，$r\neq 1$ とする．

(1)　$a_5=b_2$ とすると

$$d=\frac{a(r-\boxed{\text{ア}})}{\boxed{\text{イ}}}$$

である．さらに，$a_{17}=b_3$ とすると

$$r=\boxed{\text{ウ}},\quad d=\frac{a}{\boxed{\text{エ}}}$$

となる．このとき，$a_m=b_n$ となる m は n を用いて

$$m=\boxed{\text{オ}}\cdot\boxed{\text{カ}}^{n-1}-\boxed{\text{キ}}$$

と表される．

(2)　$c_n=\boxed{\text{オ}}\cdot\boxed{\text{カ}}^{n-1}-\boxed{\text{キ}}$ とおく．このとき，数列 $\{c_n\}$ は漸化式

$$c_{n+1}=\boxed{\text{ク}}c_n+\boxed{\text{ケ}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たす．p を実数とし，$p\neq 0$ とする．数列 $\{d_n\}$ を

$$d_n=pc_n{}^2+\boxed{\text{ク}}c_n+\boxed{\text{ケ}}$$

により定めるとき，$\{d_n\}$ の階差数列が等比数列であるとする．このとき

$$p=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である．また，数列 $\{d_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\left(\boxed{\text{セ}}^n-\boxed{\text{ソ}}\right)+\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}n$$

である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 自然数の列 1, 2, 3, 4, …… を，次のように群に分ける．

1 | 2, 3, 4, 5 | 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 | ……
第1群　第2群　第3群

ここで，一般に第 n 群は $(3n-2)$ 個の項からなるものとする．第 n 群の最後の項を a_n で表す．

(1) $a_1=1$, $a_2=5$, $a_3=12$, $a_4=$ [アイ] である．

$a_n-a_{n-1}=$ [ウ] $n-$ [エ]　($n=2, 3, 4, \cdots$)

が成り立ち

$$a_n=\frac{[オ]}{[カ]}n^{[キ]}-\frac{[ク]}{[ケ]}n \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

である．

よって，600 は，第 [コサ] 群の小さい方から [シス] 番目の項である．

(2) $n=1, 2, 3, \cdots$ に対し，第 $(n+1)$ 群の小さい方から $2n$ 番目の項を b_n で表すと

$$b_n=\frac{[セ]}{[ソ]}n^{[タ]}+\frac{[チ]}{[ツ]}n$$

であり

$$\frac{1}{b_n}=\frac{[テ]}{[ト]}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+[ナ]}\right)$$

が成り立つ．これより

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=\frac{[ニ]n}{[ヌ]n+[ネ]} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

となる．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　数列 $\{a_n\}$ は，漸化式

$$a_1=\frac{1}{2},\quad a_n+a_{n+1}=\frac{1}{n(n+2)}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．

$$S_3=a_1+(a_2+a_3)=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$$

$$S_4=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$$

である．自然数 m に対して，$S_{2m}=\sum_{k=1}^{m}(a_{2k-1}+a_{2k})$ と表されるので

$$S_{2m}=\frac{1}{\boxed{オ}}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-\boxed{カ}}-\frac{1}{2k+\boxed{キ}}\right)=\frac{m}{\boxed{ク}m+\boxed{ケ}}$$

であり，同様に，$S_{2m+1}=a_1+\sum_{k=1}^{m}(a_{2k}+a_{2k+1})$ と表されるので

$$S_{2m+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\boxed{コ}}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\boxed{サ}}\right)=\frac{\boxed{シ}m+2}{\boxed{ス}(m+\boxed{セ})}$$

である．

したがって，自然数 m に対して

$$a_{2m}=\frac{\boxed{ソタ}m^{\boxed{チ}}-m+\boxed{ツ}}{\boxed{テ}m(\boxed{ク}m+\boxed{ケ})}$$

$$a_{2m+1}=\frac{2m^{\boxed{チ}}+3m+2}{\boxed{テ}(m+\boxed{セ})(\boxed{ク}m+\boxed{ケ})}$$

である．以上のことから，2 以上の自然数 n に対して

$$a_n=\frac{1}{\boxed{ト}n(n+\boxed{ナ})}+\frac{(-\boxed{ニ})^{n+1}}{\boxed{ヌ}}\quad\cdots\cdots(*)$$

である．$a_1=\frac{1}{2}$ であるから，$(*)$ は $n=1$ のときにも成り立つので，$(*)$ はすべての自然数 n に対して成り立つ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第8講　数列②

【CHECK & UP】

1 (1) $a_4=54$ より　$a\cdot r^3=54$

r は1より大きい整数であり

$r=2$ のとき　$8a=54$　これを満たす整数 a はなく不適.

$r=3$ のとき　$27a=54$　よって　$a=2$　これは適する.

$r\geqq 4$ のとき　$a\cdot r^3\geqq 64a\geqq 64>54$ より不適.

よって　$a=\mathbf{2}$, $r=\mathbf{3}$ に限られる.

> これがセンター試験の出題であればお話にならないくらい簡単な問題となる．なぜならば求める整数 a および r の「桁数」や，解の個数がわかってしまう．もし1組しかないならばそれを「発見した」時点で，他に解が存在するか否かの検証もせず終了して次の問題に行くことができてしまうからだ．いい意味でそれを「利用」しよう．

(2) $a_n=2\cdot 3^{n-1}$ より

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}2k\cdot 3^{k-1}=2\cdot 3^0+4\cdot 3^1+6\cdot 3^2+\cdots\cdots+2(n-1)\cdot 3^{n-2}+2n\cdot 3^{n-1}$$

$$3S_n=2\cdot 3^1+4\cdot 3^2+6\cdot 3^3+\cdots\cdots\cdots+2(n-1)\cdot 3^{n-1}+2n\cdot 3^n$$

$$S_n-3S_n=2+(2\cdot 3^1+2\cdot 3^2+\cdots\cdots+2\cdot 3^{n-1})-2n\cdot 3^n$$

$$-2S_n=2+\frac{6(3^{n-1}-1)}{3-1}-2n\cdot 3^n$$

$$=2+3^n-3-2n\cdot 3^n=(1-2n)\cdot 3^n-1$$

ゆえに　$S_n=\dfrac{\mathbf{(2n-1)\cdot 3^n+1}}{\mathbf{2}}$

> 等差数列×等比数列に代表される「公比をかけてずらしたものを作って引く」という典型問題．レベルとしては教科書の域を出ないが，途中の「等比数列の和」の項数が「$n-1$ 項」であり，それとは別に単独の2項が余ることに注意．最初の項は等比数列の和に入れることができる問題が多い．原理は知っておく必要があるが，センター試験の誘導がこのような典型的な解法とは限らない．

2 (1) 第 n 群の末項は数列 $\{a_n\}$ の第　$1+2+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$　項である.

よって，第19群の末項は数列 $\{a_n\}$ の第 $\dfrac{19\cdot 20}{2}=190$ 項.

ゆえに，第20群の初項は数列 $\{a_n\}$ の第 **191** 項.

(2) a_{205} が第 n 群に属するとすると，

$$\frac{(n-1)n}{2}<205\leqq\frac{n(n+1)}{2}$$

$$(n-1)n<410\leqq n(n+1)$$

$19\cdot 20=380$, $20\cdot 21=420$ より，これを満たす整数 n は $n=20$.

(1)より第19群までに190項ある.

よって a_{205} は第20群の15番目の数.

第 n 群に属する項の総和は $n\cdot n=n^2$ である.

ゆえに　$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{205}=\displaystyle\sum_{k=1}^{19}k^2+20\cdot 15=\frac{1}{6}\cdot 19\cdot 20\cdot 39+300=\mathbf{2770}$

> 同じく典型問題「群数列」．もとの数列が n の式（等差や等比など）で表せる場合と，ある規則性をもった数字の羅列である場合に分かれるが，いずれにしても「第 n 群の末項」が「元の数列の何番目か」が焦点となる．それは「第 n 群までの項数の和」である．つまりまずは「数列の和」の計算から始まるのである．それにより，第 n 群の初項が元の数列の何番目かがわかり，これにて「第 n 群の初項，末項，項数」が明らかとなる．また，元の数列の和を求める場合も，「群ごとの和」を求め，それを目的の群まで「Σ」で計算するといった問題も有名．しかしながら，これらも典型的な誘導がついた場合である．異なった誘導がついた場合はその限りではない．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [1] (1) 数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公差 $-\frac{1}{2}$ の等差数列である．

よって　$\boldsymbol{a_n}=1+(n-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{=-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}}$

(2) $a_{n+1}=-1\cdot a_n$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 3，公比 -1 の等比数列である．よって　$\boldsymbol{a_n=3\cdot(-1)^{n-1}}$

(3) $a_{n+1}=-3a_n+8$ ……①　　$\alpha=-3\alpha+8$ ……②

①－② より　$a_{n+1}-\alpha=-3(a_n-\alpha)$

また，②より $\alpha=2$　したがって

①は　$a_{n+1}-2=-3(a_n-2)$　と変形できる．

また，$a_1-2=2$

よって，数列 $\{a_n-2\}$ は初項 2，公比 -3 の等比数列である．ゆえに　$a_n-2=2\cdot(-3)^{n-1}$

したがって　$\boldsymbol{a_n=2\cdot(-3)^{n-1}+2}$

ある２項（以上）の関係を表した式が「漸化式」．項を羅列せずとも，また「○○数列」と表現しなくとも，その式を見れば増え方がわかる．その中でも「等差数列型」「等比数列型」「階差数列型」は基本であり，式を見たら誘導がなくとも即反応をし，一般項を求められるようになっていなければならない．
新課程になり，この３つに「特性方程式型」が加わった．置き換えなどをしている余裕はない．実際には左の解答の内，日本語の部分を除いたものが本番に必要なものとなるであろう．

[2] (1) $a_{n+1}=a_n+(2n+3)$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は

$b_n=2n+3$　　よって　$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=3+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+3)$$

$$=3+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+3(n-1)=n^2+2n$$

これは，$n=1$ のときも成り立つ．　　ゆえに　$\boldsymbol{a_n=n(n+2)}$

「階差数列」である．「和から一般項」のときと同様，「$n\geqq 2$ のとき」「$n=1$ のときも成立」はセンター試験においては不必要なことも少なくない．もちろん，「計算ミス」を防ぐという意味も含め，確認をしておくにこしたことはない．

(2)
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3(n+1)(n+2)-2(n+2)-2(n+1)}{2(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{3n^2+9n+6-2n-4-2n-2}{4(n+1)(n+2)}=\boldsymbol{\frac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)}}$$

「部分分数分解」である．このタイプは，分母が２項の「積」の形で因数分解されているとき，そのそれぞれを分母にもつ２つの分数の「差」で表せるものが出題される．センター試験では，分母の因数の差が１または２のものにほぼ限定され，かつ誘導がつくことが多い．特に「どの項が相殺されるのか」がわかれば，左のように項を羅列する必要もなく，消えずに残る項のみを記述できる．
最後の形は「通分」が基本．

[3] (1) $c_{n+1}=-c_n+n^2+3$ より

$$c_{n+2}=-c_{n+1}+(n+1)^2+3$$

$$=-\{-c_n+n^2+3\}+n^2+2n+4$$

ゆえに　$\boldsymbol{c_{n+2}=c_n+2n+1}$

漸化式は見ただけで解けるものばかりではない．誘導に乗ることで何をさせたいかが自ずと見えるようになっている．今回は「１つおき」に「階差数列型」漸化式となっている．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　(1)の結果より　$c_{n+2}-c_n=2n+1$

$n=23$ のとき　$c_{25}-c_{23}=2\cdot23+1=\mathbf{47}$

$n=21$ のとき　$c_{23}-c_{21}=2\cdot21+1=43$

$n=19$ のとき　$c_{21}-c_{19}=2\cdot19+1=39$

$\vdots$

$n=1$ のとき　$c_3-c_1=2\cdot1+1=3$

これらを辺々加えると

$c_{25}-c_1$ は，初項が 3，公差が 4，項数が 12 の等差数列の和であるから

$$c_{25}-c_1=\frac{12(3+47)}{2}=300$$

$c_1=2$ より　$c_{25}=\mathbf{302}$

講義でもふれるが，操作を加えた後，具体的に項を列挙したりずらしたりし，その後「引く」ことで目的のものを作る(残す)という誘導がセンター試験では散見される．

近年のセンター試験の数列は，数学Ⅰの時代のものとは異なり，基本問題および基本的な解法だけで乗り切るのは厳しい問題が少なくない．知識は基本的なものばかりであるが，それをどう使うかに関して，誘導に乗り理解しながら時間内に進めるためには，基本事項の「理解」が必要である．「公式（と呼ばれているだけのものも含む)」を確実に理解し，いざというときに適切に運用できるよう，近年の過去問や模試を含め数多くの問題にふれ，誘導形式に慣れておこう．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【講義問題　解答例】※記述式における模範解答ではありません．授業を補完するものです．

1 (1)　$a_{n+1}=-2a_n+8,\ a_1=3$　より　$a_{n+1}-\dfrac{8}{3}=-2\left(a_n-\dfrac{8}{3}\right),\ a_1-\dfrac{8}{3}=\dfrac{1}{3}$

よって　$a_n-\dfrac{8}{3}=\dfrac{1}{3}\cdot(-2)^{n-1}$　より　$a_n=\dfrac{8}{3}+\dfrac{1}{3}\cdot(-2)^{n-1}=\boldsymbol{\dfrac{(-2)^{n-1}+8}{3}}$

したがって　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1\cdot\{1-(-2)^n\}}{1+2}+8n\right]=\boldsymbol{\dfrac{-(-2)^n+24n+1}{9}}$

(2)　$a_n=0$ となるのは　$\dfrac{1}{3}\cdot(-2)^{n-1}=-\dfrac{8}{3}$　より　$n-1=3$　ゆえに　$n=\mathbf{4}$ のときである．

$\{a_n\}$：3，2，4，0，8 ，−8，24，−40，… より　$T_4=3+2+4+0=\mathbf{9}$

$n>4$ すなわち $n\geqq5$ のとき　$|a_n|=\begin{cases}a_n & (n：奇数)\\ -a_n & (n：偶数)\end{cases}$

したがって　$|a_n|=a_n\cdot(-1)^{n-1}=\dfrac{\boldsymbol{2^{n-1}+8\cdot(-1)^{n-1}}}{3}$

よって　$n>4$　すなわち　$n\geqq5$ のとき

$$T_n=T_4+\sum_{k=5}^{n}|a_k|=9+\frac{1}{3}\sum_{k=5}^{n}\{2^{k-1}+8\cdot(-1)^{k-1}\}$$

$$=9+\frac{1}{3}\left[\frac{2^4(2^{n-4}-1)}{2-1}+\frac{8\{1-(-1)^{n-4}\}}{1+1}\right]$$

$$=9+\frac{1}{3}(2^n-16)+\frac{4}{3}\{1-(-1)^{n-4}\}=\frac{2^n-4(-1)^n+15}{3}$$

n が奇数のとき　$T_n=\boldsymbol{\dfrac{2^n+19}{3}}$　　n が偶数のとき　$T_n=\boldsymbol{\dfrac{2^n+11}{3}}$

2　$\{a_n\}$：1，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{9}$，$\dfrac{1}{27}$，…

(1)　$\{b_n\}$ は初項 $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$，公比 $\boldsymbol{\dfrac{1}{9}}$ の等比数列である．

ゆえに　$b_n=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3^{2(n-1)}}=\dfrac{1}{3^{2n-1}}$

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{9}}=\boldsymbol{\frac{3}{8}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)}$$

$$b_1b_2\cdots b_n=\frac{1}{3^1}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{3^{2n-1}}=\frac{1}{3^{\frac{n(1+2n-1)}{2}}}=\boldsymbol{\frac{1}{3^{n^2}}}$$

(2)　$c_n=2n\cdot b_n$　…(ア)　より　$c_{n+1}=2(n+1)\cdot b_{n+1}=(2n+2)\cdot\dfrac{1}{9}b_n$

$9c_{n+1}=(2n+2)\cdot b_n$　…(イ)　　(イ)−(ア)より　$\mathbf{9}c_{n+1}-c_n=\mathbf{2}b_n$　であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(9c_{k+1}-c_k)=2\sum_{k=1}^{n}b_k=2T_n\quad\cdots\cdots①$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$①の左辺=(9c_2-c_1)+(9c_3-c_2)+(9c_4-c_3)+\cdots+(9c_{n+1}-c_n)$$
$$=8(c_2+c_3+\cdots+c_n)+9c_{n+1}-c_1=8(U_n-c_1)+9c_{n+1}-c_1$$
$$=\mathbf{8}U_n+\mathbf{9}c_{n+1}-\mathbf{9}c_1$$

よって　①より　$U_n=\frac{1}{4}T_n-\frac{9}{8}c_{n+1}+\frac{9}{8}c_1$　であり

$c_{n+1}=2(n+1)\cdot b_{n+1}=2(n+1)\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^n$ より

$$U_n=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)-\frac{3}{4}(n+1)\cdot\frac{1}{9^n}+\frac{9}{8}\cdot2\cdot\frac{1}{3}$$
$$=\frac{3}{32}+\frac{3}{4}-\left\{\frac{3}{32}+\frac{3}{4}(n+1)\right\}\cdot\frac{1}{9^n}$$
$$=\frac{\mathbf{27}}{\mathbf{32}}-\frac{\mathbf{24}n+\mathbf{27}}{32}\cdot\frac{1}{\mathbf{9}^n}$$

3　等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると　$a_2=-\frac{7}{3}$，$a_5=-\frac{25}{3}$ であることより

$a+d=-\frac{7}{3}$，$a+4d=-\frac{25}{3}$　　ゆえに　$a=a_1=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$，$d=\mathbf{-2}$

$$a_n=-\frac{1}{3}+(n-1)\cdot(-2)=\mathbf{-2}n+\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n}{2}\left\{-\frac{1}{3}+\left(-2n+\frac{5}{3}\right)\right\}=-n^2+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}n$$

$\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{4}{3}b_n+S_n=\frac{4}{3}b_n-n^2+\frac{2}{3}n$　……①　について

$n=1$ のとき　$b_1=\frac{4}{3}b_1-1+\frac{2}{3}$ より　$b_1=\mathbf{1}$

また，$\sum_{k=1}^{n+1}b_k=\sum_{k=1}^{n}b_k+b_{n+1}$　すなわち　$\sum_{k=1}^{n+1}b_k-\sum_{k=1}^{n}b_k=b_{n+1}$　である．これと①より

$$b_{n+1}=\frac{4}{3}b_{n+1}-\frac{4}{3}b_n+\left\{-(n+1)^2+\frac{2}{3}(n+1)\right\}-\left(-n^2+\frac{2}{3}n\right)$$

ゆえに　$b_{n+1}=\mathbf{4}b_n+\mathbf{6}n+\mathbf{1}$　である．

これが　$b_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=r(b_n+\alpha n+\beta)$ と変形できるとすると，$r=4$ であり，

$b_{n+1}=4b_n+3\alpha n+(3\beta-\alpha)$　である．

係数比較して　$3\alpha=6$，$3\beta-\alpha=1$　　ゆえに　$\alpha=2$，$\beta=1$

したがって　$b_{n+1}+\mathbf{2}(n+1)+\mathbf{1}=4(b_n+2n+1)$，$b_1+2\cdot1+1=4$

よって　$c_n=b_n+2n+1$ とおくと　$c_{n+1}=4c_n$，$c_1=4$ より

$\{c_n\}$ は初項 **4**，公比 **4** の等比数列である．

よって　$c_n=4\cdot4^{n-1}=4^n$　　したがって　$b_n+2n+1=4^n$

ゆえに　$b_n=\mathbf{4}^n\mathbf{-2}n\mathbf{-1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　数列②

1　$a_n=a+(n-1)d$　　$b_n=ar^{n-1}$　$(a\neq 0,\ r\neq 1)$

(1)　$a_5=b_2$ より　$a+4d=ar$　……①　　$d=\dfrac{a(r-\mathbf{1})}{\mathbf{4}}$

$a_{17}=b_3$ より　$a+16d=ar^2$　……②

②−①×4 より　$3a=4ar-ar^2$　　$a\neq 0$ より　$r^2-4r+3=0$　　$r\neq 1$ より　$r=\mathbf{3}$

このとき　$d=\dfrac{a}{\mathbf{2}}$　　よって　$a_n=a+(n-1)\cdot\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}n+\dfrac{a}{2}$　　$b_n=a\cdot 3^{n-1}$

$a_m=b_n$ となるのは　$\dfrac{a}{2}m+\dfrac{a}{2}=a\cdot 3^{n-1}$　　$a\neq 0$ より　$m+1=2\cdot 3^{n-1}$

ゆえに　$m=\mathbf{2}\cdot\mathbf{3}^{n-1}-\mathbf{1}$ と表される．

(2)　$c_n=2\cdot 3^{n-1}-1$ とおくと，$c_1=1$　この c_n が　$c_{n+1}=\alpha c_n+\beta$　を満たすとき．

つまり　$2\cdot 3^n-1=2\alpha\cdot 3^{n-1}-\alpha+\beta$

すなわち　$6\cdot 3^{n-1}-1=2\alpha\cdot 3^{n-1}-(\alpha-\beta)$

これがすべての自然数 n で成り立つのは

$2\alpha=6$　かつ　$\alpha-\beta=1$　　つまり　$\alpha=3,\ \beta=2$　のとき

このとき　$c_{n+1}=\mathbf{3}c_n+\mathbf{2}$

$d_n=pc_n{}^2+3c_n+2$（$p\neq 0$）と定めると

$$\begin{aligned}d_{n+1}-d_n&=(pc_{n+1}{}^2+3c_{n+1}+2)-(pc_n{}^2+3c_n+2)\\&=(c_{n+1}{}^2-c_n{}^2)p+3(c_{n+1}-c_n)\\&=(c_{n+1}-c_n)\{(c_{n+1}+c_n)p+3\}\\&=(2\cdot 3^n-2\cdot 3^{n-1})\{(2\cdot 3^n+2\cdot 3^{n-1}-2)p+3\}\\&=(4\cdot 3^{n-1})(8\cdot 3^{n-1}p-2p+3)\\&=32p\cdot 3^{2(n-1)}+4\cdot 3^{n-1}(-2p+3)\end{aligned}$$

これが等比数列になるのは　$p\neq 0$ より　$-2p+3=0$　つまり　$p=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$ のとき

（他に存在するか否かはマーク式のため未検証）

このとき　$d_{n+1}-d_n=48\cdot 9^{n-1}$，$d_1=\dfrac{3}{2}c_1{}^2+3c_1+2=\dfrac{13}{2}$

よって，$n\geqq 2$ のとき　$d_n=d_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}48\cdot 9^{k-1}=\frac{13}{2}+\frac{48(9^{n-1}-1)}{9-1}=6\cdot 9^{n-1}+\frac{1}{2}$

これは $n=1$ のときも成り立つ．

ゆえに　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(6\cdot 9^{k-1}+\frac{1}{2}\right)=\frac{6(9^n-1)}{9-1}+\frac{1}{2}n=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}(\mathbf{9}^n-\mathbf{1})+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}n$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　分ける前の数列の n 番目の項は n である．

第 n 群の末項を a_n とする．

(1)　第 n 群の末項はもとの数列の

第 $1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\dfrac{n\{1+(3n-2)\}}{2}=\dfrac{n(3n-1)}{2}$ 項

よって　$a_n=\dfrac{n(3n-1)}{2}$ より　$a_4=\dfrac{4\cdot 11}{2}=\mathbf{22}$

a_n-a_{n-1} は $\{a_n\}$ の階差数列の第 $(n-1)$ 項．マークより，それは等差数列．

よって　$c_{n-1}=a_n-a_{n-1}$　とおくと

$\{c_n\}$ の初項は　$c_1=a_2-a_1=4$

$c_2=a_3-a_2=7$　より　公差は　3

よって　$c_n=4+(n-1)\cdot 3=3n+1$

ゆえに　$a_n-a_{n-1}=c_{n-1}=3(n-1)+1=3n-2$

ここで，600 が第何群に入っているかを考えるために a_n を利用する．

$a_n=\dfrac{n(3n-1)}{2}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}n^2-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}n\fallingdotseq\dfrac{3}{2}n^2$ と考えると　$\dfrac{3}{2}n^2=600$ より　$n^2=400$

よって　$n=20$

$a_{20}=590$ より第 20 群の末項は 590

ゆえに，600 は第 **21** 群の **10** 番目の数である．

【参考】　$a_n-a_{n-1}=3n-2$ から a_n をまともに出すと以下．

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=2}^{n}(3k-2)=1+\frac{(n-1)\{4+(3n-2)\}}{2}$$

$$=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n=\frac{n(3n-1)}{2}$$　($n=1$ のときも成り立つ)

(2)　第 $(n+1)$ 群の小さい方から $2n$ 番目の項 b_n について

第 n 群の末項は　$a_n=\dfrac{n(3n-1)}{2}$　より

$$b_n=a_n+2n=\frac{n(3n-1)}{2}+2n=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}n^2+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}n=\frac{3}{2}n(n+1)$$

$$\frac{1}{b_n}=\frac{2}{3n(n+1)}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\mathbf{1}}\right)$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{\mathbf{2n}}{\mathbf{3n+3}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　$a_1=\frac{1}{2}$，$a_n+a_{n+1}=\frac{1}{n(n+2)}$　より

$$S_3=a_1+(a_2+a_3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot4}=\mathbf{\frac{5}{8}}\qquad S_4=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}=\frac{6}{15}=\mathbf{\frac{2}{5}}$$

$$S_{2m}=\sum_{k=1}^{m}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{\mathbf{2}}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-\mathbf{1}}-\frac{1}{2k+\mathbf{1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2m+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2m}{2m+1}=\frac{m}{\mathbf{2m+1}}$$

$$S_{2m+1}=a_1+\sum_{k=1}^{m}(a_{2k}+a_{2k+1})=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k(2k+2)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\mathbf{4}}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\mathbf{1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{m+1}\right)=\frac{3(m+1)-1}{4(m+1)}=\frac{\mathbf{3m+2}}{\mathbf{4(m+1)}}$$

$m\geqq2$ のとき

$$a_{2m}=S_{2m}-S_{2m-1}=\frac{m}{2m+1}-\frac{3m-1}{4m}=\frac{4m^2-(2m+1)(3m-1)}{4m(2m+1)}$$

$$=\frac{\mathbf{-2m^2-m+1}}{\mathbf{4m(2m+1)}}\quad\cdots\cdots①\quad(m=1\text{ のときも成り立つ})$$

（また，$a_{2m}+a_{2m+1}=\frac{1}{2m(2m+2)}$　より

$$a_{2m+1}=\frac{1}{2m(2m+2)}-a_{2m}=\frac{1}{4m(m+1)}-\frac{-2m^2-m+1}{4m(2m+1)}$$

$$=\frac{2m+1-(m+1)(-2m^2-m+1)}{4m(m+1)(2m+1)}=\frac{2m^3+3m^2+2m}{4m(m+1)(2m+1)}$$

$$=\frac{2m^2+3m+2}{4(m+1)(2m+1)}\quad\cdots\cdots②$$

マークする部分がないため計算不要.）

$2m=n$ とおくと　$m=\frac{n}{2}$　　このとき，①より

$$a_n=\frac{-\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}+1}{2n(n+1)}=\frac{-n^2-n+2}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{-n^2-n+2}{n^2+n}=\frac{1}{4}\left(-1+\frac{2}{n^2+n}\right)$$

$$=\frac{1}{2n(n+1)}-\frac{1}{4}$$

（$2m+1=n$ とおくと　$m=\frac{n-1}{2}$　　このとき②より

$$a_n=\frac{\frac{(n-1)^2}{2}+3\cdot\frac{n-1}{2}+2}{4\left(\frac{n-1}{2}+1\right)n}=\frac{n^2+n+2}{4(n+1)n}=\frac{1}{4}\cdot\frac{n^2+n+2}{n^2+n}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{n^2+n}\right)$$

$$=\frac{1}{2n(n+1)}+\frac{1}{4}$$

マークを埋めるためだけなら計算不要.）

よって　$n\geqq2$ のとき　$a_n=\frac{1}{\mathbf{2n(n+1)}}+\frac{(\mathbf{-1})^{n+1}}{\mathbf{4}}$　（$n=1$ のときも成り立つ）

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。